תיאורית הקוונטים א מספר הקורס 141411

תוכן העניינים

תיאורית הקוונטים א מספר הקורס 141411

פרק 1 - תורת הקוונטים חלק 2

תוכן העניינים

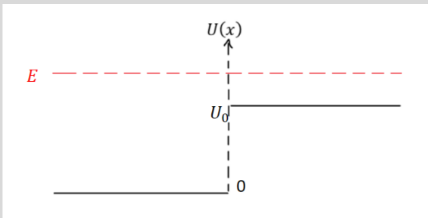
מהירות הפאזה, יחס דיספרסיה ומהירות החבורה

סיכום כללי

שם	נוסחה	הערות
מהירות הפאזה	$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$	המהירות של אורך גל מסוים
מהירות החבורה	$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$	מהירות של כל הפונקציה או סכום כל הגלים (חבילת הגלים)
יחס הדיספרסיה	הקשר בין ω ל-k	

פיזור

סיכום כללי

שם	נוסחה	הערות
מקדם ההעברה	$T=\frac{\vert C\vert^2}{\vert A\vert^2}$	ההסתברות שהחלקיק יעבור את המחסום במקרה שבו k_2 בתחום אליו החלקיק עובר שונה מ-k_1 בתחום ממנו החלקיק הגיע $T=\frac{\vert C\vert^2}{\vert A\vert^2}\frac{k_2}{k_1}$
מקדם החזרה	$R=\frac{\vert B\vert^2}{\vert A\vert^2}$	ההסתברות שהחלקיק יוחזר מהמחסום
עבור מדרגת פוטנציאל וכאשר $\mathrm{E}>\mathrm{U}_0$ 	$T=\frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}\ ;\ R=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2$	

- כאשר $E<U(\pm\infty)$ נקבל מצבים קשורים, החלקיק "כלוא" ורמות האנרגיה בדידות.
- כאשר $E>U(\pm\infty)$ נקבל פיזור, החלקיק יגיע לאינסוף ורמות האנרגיה רציפות.

שאלות

1) פיזור מפוטנציאל מלבני

חלקיק חופשי בעל מסה m נע משמאל לימין ונתקל בפוטנציאל מלבני בגובה U_0 וברוחב L המתחיל ב-$x=0$. אנרגית החלקיק היא E וקטנה מ-U_0.

א. הראו כי הפתרון הכללי לפונקציית הגל הוא מצורה:

$$\psi(x)=\begin{cases}Ae^{ikx}+Be^{-ikx} & x<0\\ Ce^{\alpha x}+De^{-\alpha x} & 0<x<L\\ Fe^{ikx} & L<x\end{cases}$$

כאשר: $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ ו- $\alpha=\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$.

ב. רשמו את תנאי השפה והראו כי הקשר בין הקבועים נתון לפי המשוואות:

$$A+B=C+D$$
$$ik(A-B)=\alpha(C-d)$$
$$Ce^{\alpha L}+De^{-\alpha L}=Fe^{ikL}$$
$$\alpha\left(Ce^{\alpha L}-De^{-\alpha L}\right)=ikFe^{ikL}$$

ג. פתרו את המשוואות (רצוי באמצעות מחשב) והראו כי:

$$T=\left|\frac{F}{A}\right|^2=\frac{1}{\cosh^2(\alpha L)+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\sinh^2(\alpha L)}$$

כאשר: $\gamma=\frac{\alpha}{k}-\frac{k}{\alpha}$.

ד. הראו כי במקרה של $e^{-\alpha L}\ll 1$ מקדם ההעברה הוא בקירוב:

$$T\approx 16\frac{E}{U_0}\left(1-\frac{E}{U_0}\right)e^{-2\alpha l}$$

ה. כעת הניחו ש-$E>U_0$, מצאו את מקדם ההעברה במקרה זה.
הדרכה: חזרו על השלבים שבסעיפים א - ג עבור מקרה זה.
רמז: $\cosh(ik)=\cos(k)$ ו- $\sinh(ik)=i\sin(k)$.

2) חלקיק עובר מעל בור פוטנציאל סופי

חלקיק בעל מסה m נע משמאל בהשפעת הפוטנציאל:

$$U(x)=\begin{cases}U_0 & x<0\\ 0 & 0<x<L\\ U_0 & L<x\end{cases}$$

כאשר אנרגיית החלקיק E נתונה וגדולה מ- U_0.

א. מצאו את מקדם ההעברה.

ב. עבור אילו מצבים הבור "שקוף" לתנועת החלקיק? האם המצבים מוכרים לכם?

3) מקדם החזרה בפגיעת אלקטרון בשפת מתכת

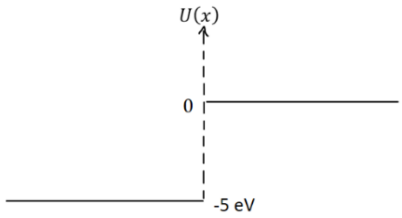
במקרה של פליטת אלקטרונים ממתכת, חלק מהאלקטרונים עם אנרגיה מספיקה ליציאה מהמתכת עדיין יכולים להיות מוחזרים משפת המתכת.

במודל חד מימדי נניח כי פוטנציאל האלקטרון בתוך המתכת $(x<0)$ שווה ל- $-5\,\mathrm{e}V$ והפוטנציאל הוא אפס מחוץ למתכת $(x>0)$.

מהו מקדם ההחזרה של האלקטרון משפת המתכת אם אנרגיית האלקטרון היא

א. $90\,\mathrm{e}V$

ב. $0.4\,\mathrm{e}V$



תשובות סופיות

1) א-ד. שאלות הוכחה.

ה. $T=\left|\frac{F}{A}\right|^2=\dfrac{1}{\cos^2(k_2L)+\left(\frac{\tilde{\gamma}}{2}\right)^2\sin^2(k_2L)}$

כאשר: $\tilde{\gamma}=\frac{k_z}{k}+\frac{k}{k_2}$ ו- $k_2=\frac{\sqrt{2m(E-v_0)}}{\hbar}$.

2) א. $T=\dfrac{1}{\cos^2(k_2L)+\left(\frac{\tilde{\gamma}}{2}\right)^2\sin^2(k_2L)}$ כאשר: $\tilde{\gamma}=\frac{k_1}{k_2}+\frac{k_2}{k_1}$ ו- $k_2=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

ב. $n=1,2,3,\ldots$ $E_n=\frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2mL^2}$, כן.

3) א. $1.83\cdot10^{-4}$ ב. 0.328

פונקציית דלתא של דיראק

סיכום כללי

הגדרת הפונקציה:

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \infty, & x=0\end{cases}$$

או

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,\mathrm{d}x=1$$

או

$$\delta_a(x)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/a^2}$$

כאשר a הולך לאפס.

תכונה:

$$f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a)\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=f(a)$$

פיזור מפונקציית דלתא:

עבור:

$$V(x)=-a\delta(x)$$

כאשר $E<0$:

$$\psi(x)=\frac{\sqrt{am}}{\hbar}\mathrm{e}^{-\frac{am}{\hbar^2}|x|}$$

$$\mathrm{E}=-\frac{a^2m}{2\hbar^2}$$

מקבלים מצב אחד בלבד, לא משנה מה הערך של a (גודל הבור).

כאשר $E>0$ וחלקיק שמגיע משמאל:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Ce^{ikx} & x > 0 \end{cases}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}$$

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{1}{1+\beta^2} \qquad \beta = \frac{am}{\hbar^2 k}$$

עבור:

$$V(x) = +a\delta(x)$$

E חייב להיות גדול מאפס והפתרון זהה לפתרון במקרה של הפוטנציאל השלילי כאשר $E > 0$.

שאלות

1) פוטנציאל דלתא בתוך בור אינסופי**

אלקטרון נמצא בבור פוטנציאל ברמה השנייה. הבור הוא אינסופי אך במרכזו יש פוטנציאל דלתא, כלומר:

$$V(x) = \infty, |x| > \frac{l}{2}$$
$$V(x) = a\delta(x),\ |x| < l/2$$

א. מצאו את הפתרונות עבור משוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן. הפרידו בין הפתרונות הסימטריים לאנטי סימטריים ומצאו את האנרגיות המתאימות לכל פתרון. עבור הפתרונות הסימטריים הראו רק כי המשוואה ממנה ניתן לקבל את רמות האנרגיה היא מהצורה: $\tan\left(k\frac{l}{2}\right) = -\frac{\hbar^2 k}{am}$ וציירו פתרון גרפי כללי למשוואה. בשני המקרים אין צורך לנרמל את הפתרונות.

ב. דונו במקרה ש- $a \ll \frac{\hbar^2}{ml}$ ובמקרה ש- $a \gg \frac{\hbar^2}{ml}$.

ג. האלקטרון יורד לרמת היסוד ופולט פוטון, מהי האנרגיה של הפוטון הנפלט ב-eV אם: $a = 2\cdot 10^{-27} j\cdot m$ ו- $l = 2.7nm$.

2) קרן אלקטרונים עוברת שתי דלתות

קרן אלקטרונים מפוזרת על ידי מחסום פוטנציאל המורכב שתי פונקציות דלתא זהות במרחק l. כלומר: $V(x) = a\delta(x) + a\delta(x-l)$.

חשבו בקירוב את האנרגיה הכי נמוכה של אלקטרון עבורה אין החזרה של הקרן (כל האלקטרונים עוברים דרך המחסום).

$$a = 1.9 \cdot 10^{-27} j \cdot m, l = 4.2nm$$

3) קרן עוברת דרך שתי דלתות ומדרגה

קרן אלקטרונים מגיעה משמאל לפוטנציאל הבא:

$$V(x) = U(x) + a\delta(x) + a\delta(x-l)$$

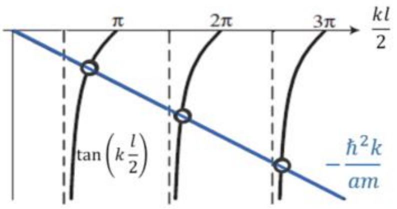
$$U(x) = \begin{cases} U_0 & 0 < x < l \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצאו את רמת האנרגיה הרביעית עבורה אין החזרה של הקרן, יש להשתמש בפתרון גרפי ולבטא ב-eV.

נתון: $a = 0.63 \cdot 10^{-28} j \cdot m\ ,\ U_0 = 4.7eV,\ l = 0.2nm$

תשובות סופיות

1) א. פתרון גרפי למצבים הסימטריים:



האנרגיות של המצבים האנטי סימטריים: $n = 2, 4, 6, \ldots$ $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$.

ב. האנרגיות של הפונקציות האנטי סימטריות לא מושפעות מ- a עבור $a \ll \frac{\hbar^2}{ml}$ האנרגיות של הפונקציות הסימטריות שואפות לאנרגיות שלהם בבור אינסופי (ללא דלתא). עבור $a \gg \frac{\hbar^2}{ml}$ האנרגיות של הפונקציות הסימטריות שואפות לאנרגיות של בור אינסופי **ברוחב** $\frac{l}{2}$.

ג. $0.3eV$

2) $0.02eV$

3) $125eV$

פוטנציאלים תלת מימדים

סיכום כללי

פונקציית הגל והאנרגיות של תיבה תלת מימדית :

$$\psi\left(x,y,z\right)=\sqrt{\frac{8}{abc}}\sin\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n_z\pi}{c}z\right)$$

$$E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}+\frac{n_z^2}{c^2}\right)$$

אוסילטור הרמוני תלת מימדי :

$$v\left(x,y,z\right)=\frac{1}{2}k_yx^2+\frac{1}{2}k_yy^2+\frac{1}{2}k_zz^2$$

האנרגיה של אוסילטור תלת מימדי :

$$E=\left(n_x-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_x+\left(n_y-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_y+\left(n_z-\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_z$$

ניוון - כאשר לכמה מצבים (פונקציות גל) שונים יש את אותה האנרגיה.
אי אפשר לדעת את המצב של החלקיק מהאנרגיה בלבד.

ניוון היא תופעה שלא מתרחשת במימד אחד

דרגת הניוון מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש לאנרגיה.

שאלות

1) אוסילטור ב-Z בור ב-X ו-Y

חלקיק בעל מסה m נמצא תחת הפוטנציאל הבא:

$$V(x,y,z)=V_1(x)+V_2(y)+V_3(z)$$

כאשר:

$$V_1(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2\ ,+V_2(y)=\begin{cases}0, & 0<y<a\\ \infty, & otherwise\end{cases}\ ,V_3(Z)=\begin{cases}0, & 0<z<b\\ \infty, & otherwise\end{cases}$$

כמו כן נתון כי:

$$\hbar\omega=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

$$b=2a$$

א. מהי האנרגיה של הרמה המעוררת החמישית?
ב. מהי דרגת הניוון של רמה זו?
ג. מהי פונקציית הגל של חלקיק שנמצא ברמת אנרגיה זו?

תשובות סופיות

1) א. $E=2.75\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ רמה 5. ב. 2

ג. $\psi(x,y,z)=\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)e^{-\frac{z^2\pi^2\hbar}{4L^2}}\left[\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2L}y\right)\left(1-\left(\frac{\pi z}{L}\right)^2\right)+\beta\sin\left(\frac{3\pi}{2L}y\right)\right]$

פונקציית הגל כתלות בזמן

סיכום כללי

ניתן לקבל את פונקציית הגל הכללית, הפותרת את משוואת שרדינגר התלויה בזמן על ידי קומבינציה לינארית של פונקציות הגל המתקבלות במצבים עמידים (מתוך פתרון משוואת שרדינגר הבלתי תלוי בזמן).

$$\Psi(x,t) = \sum_n \alpha_n \psi_n(x) \mathrm{e}^{-\frac{iE_n}{\hbar}t}$$

כאשר - הן פתרונות המצבים העמידים ו - היא האנרגיה של כל מצב.

את המקדמים ניתן למצוא לפי (בהנחה שהפונקציות שמתקבלות מהמצב העמיד הן אורתונורמליות).

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\Psi(x,0)\,\mathrm{d}x$$

ו - $|\alpha_n|^2$ הן ההסתברות להיות במצב מסוים.

יוצא גם שאם $\Psi(x,0)$ מנורמלת אז $\Psi(x,t)$ מנורמלת לכל t.

שאלות

1) רשמו פונקציית גל

חלקיק בעל מסה m נמצא תחת פוטנציאל מהצורה $\frac{1}{2}kx^2$.
ב- $t=0$ לחלקיק הסתברות של 75% להיות במצב ייסוד ו- 25% להיות במצב המעורר הראשון. רשמו את פונקציית הגל של החלקיק כתלות בזמן.
פונקציות הגל של מצב היסוד והמצב המעורר הראשון הן:

$$\psi_1(x) = \left(\pi b^2\right)^{-\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_2(x) = \left(\pi b^2\right)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{b} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

כאשר $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$
והאנרגיות הן:

$$E_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n = 1,2,3 \ldots$$

2) מסת חלקיק מפונקציית הגל

נתונה פונקציית גל (חד מימדית) של חלקיק חופשי

$$\Psi(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{\tau}\right)}$$

כאשר A L , ,τ קבועים חיוביים נתונים.
מהי מסת החלקיק?

תשובות סופיות

1) $\psi(x,t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_1(x)e^{-i\frac{1}{2}\omega t} + \frac{1}{2}\psi_2(x)e^{-i\frac{3}{2}\omega t}$

2) $m = \frac{\hbar\tau}{2L^2}$

אופרטורים

סיכום כללי

אופרטור - לכל גודל פיזיקאלי ניתן לשייך אופרטור.
כאשר שמים את האופרטור בין Ψ ל-Ψ^* ועושים אינטגרל על כל המרחב (סנוויץ) הוא נותן את ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי אליו הוא שייך.

$$\langle Q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{Q}\Psi \, \mathrm{d}x$$

אופרטור המיקום: $\hat{\mathrm{x}} = x$

אופרטור התנע במימד אחד: $\hat{p} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}$

כל אופרטור אחר יהיה פונקציה של אופרטור המיקום והתנע:

$$Q(x,p,t) \rightarrow \hat{Q}\left(x,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}t\right)$$

כאשר מכפילים אופרטור בפונקציה אומרים שהאופרטור "פועל" על הפונקציה.
אם $\hat{Q}\psi = \lambda\psi$, אז ψ היא פונקציה עצמית של האופרטור ו-λ הוא ערך עצמי (ע"ע) של האופרטור.
הפונקציות העצמיות של אופרטור התנע הן: $\psi(x) = Ae^{ikx}$ והערכים העצמיים הם: $\hbar k$.

הפונקציות העצמיות של אופרטור המיקום הן: $\delta(x-a)$
והערכים העצמיים הם a (המיקום עצמו).

אופרטור ההמילטוניאן (מודד את האנרגיה):

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

אפשר לכתוב את משוואת שרידנגר הבלתי תלויה בזמן באמצעות ההמילטוניאן.
הפונקציות העצמיות של ההמלטוניאן הן הפתרונות של משוואת שרדינגר <u>הבלתי תלויה בזמן</u> והאנרגיות הן הערכים העצמיים של ההמילטוניאן.

שאלות

1) המילטוניאן ומדידת אנרגיה בבור פוטנציאל

חלקיק בעל מסה m נמצא בבור פוטנציאל ברוחב $0 < x < l$.

א. מצאו את המצבים העצמיים ואת הערכים העצמיים של ההמלטוניאן.

כעת נניח כי פונקציית הגל של החלקיק ברגע מסוים היא:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_2(x)$$

כאשר $\psi_1(x)$ ו-$\psi_2(x)$ הן פונקציות הגל של האנרגיות E_1 ו-E_2 בבור בהתאמה.

ב. האם פונקציה זו היא פונקציה עצמית של ההמילטוניאן?

ג. מהי האנרגיה הממוצעת של החלקיק במצב הנ"ל?
האם ניתן למצא את החלקיק באנרגיה זו?

2) חלקיק בצד ימין של בור פוטנציאל

חלקיק בעל מסה m נמצא בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב l.

נתון כי בזמן $t = 0$ לחלקיק הסתברות שווה להיות בחצי הימני של הבור.

א. מהי פונקציית הגל של החלקיק ב-$t = 0$?

ב. מצאו את פונקציית הגל של החלקיק כתלות בזמן.
שערו ללא חישוב האם החלקיק יישאר בחצי הימני של הבור?

ג. מהי ההסתברות שהחלקיק יהיה במצב היסוד ב-$t = 2sec$?

ד. ב- $t = 3\ sec$ נעשתה מדידה והתגלה שהחלקיק אכן במצב היסוד.
מהי פונקציית הגל של החלקיק מרגע זה והילך, ניתן לקבוע רגע זה כ-$t = 0$ חדש.

ה. מהו ערך התוחלת של התנע של החלקיק מסעיף ד'?

3) מוסיפים פאזות למקדמים

חלקיק נמצא בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב l.

א. מצאו את ההסתברות כתלות בזמן של החלקיק להיות בחצי השמאלי של הבור אם ידוע שהוא נמצא במצב עמיד כלשהו (או מצב עצמי של ההמילטוניאן).

כעת נתון שפונקציית הגל של החלקיק היא:

$$\Psi(x,t) = c_1\psi_1(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_1 t}{\hbar}} + c_2\psi_2(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_2 t}{\hbar}}$$

כאשר $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ψ_1 ו-ψ_2 הן פונקציות הגל של מצב היסוד והמצב המעורר הראשון בבור, E_1 ו-E_2 הן האנרגיות של אותם מצבים.

ב. הראו כי $\Psi(x,t)$ מנורמלת.

ג. מהי ההסתברות למצא את החלקיק בחצי השמאלי של הבור כתלות בזמן?

ד. חזרו על סעיף ג כאשר $\mathrm{c}_1 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{c}_2 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}}{\sqrt{2}}$.

4) **אופרטור האנרגיה הקינטית**

אופרטור האנרגיה הקינטית הוא:

$$\hat{T}=\frac{\hat{p}^2}{2m}$$

הראו כי הפונקציות העצמיות של אופרטור התנע $\phi_p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ikx}$ הן גם פונקציות עצמיות של אופרטור האנרגיה הקינטית ומצאו את הערכים העצמיים של אופרטור זה.

תשובות סופיות

1) א. $E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$, $\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ ב. לא. ג. לא, $\langle E\rangle=\frac{\pi^2\hbar^2}{ml^2}$

2) א. $\psi(x,t=0)=\begin{cases}0 & 0\le x<\frac{l}{2}\\ \sqrt{\frac{2}{l}} & \frac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$ ב.

$$\psi(x,t)=\sum\alpha_n\psi_n(x)e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}$$

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$$

$$\alpha_n=\frac{2}{\pi n}\left[\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-(-1)^n\right]$$

, לא יישאר.

ג. $\left(\frac{2}{\pi}\right)^2$ ד. $E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}$, $\psi(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}$. ה. אפס.

3) א. 0.5 ב. הוכחה. ג. $\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right)\frac{4}{3\pi}$

ד. $P\left(0\le x\le\frac{l}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{4}{3\pi}\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t-\Delta\varphi\right)$, $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$.

4) $\lambda=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$

אופרטורים הרמיטיים

סיכום כללי

גודל פיזיקאלי מדיד חייב להיות מספר ממשי .
כל הגדלים הפיזיקאלי מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים.

הגדרה :

$$\left(\hat{A}\Psi\right)^{*}=\Psi^{*}\hat{A}$$

לכל הפונקציות במרחב.

או :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1^{*}\hat{A}\Psi_2\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\hat{A}\Psi_1\right)^{*}\Psi_2\,\mathrm{d}x$$

תכונות של אופרטור הרמיטי :

1. ערך התוחלת של אופרטור הרמטי תמיד ממשי.
2. הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.
3. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמטי הן אורתוגונליות.
4. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.*

* אם ניתן לתאר את <u>כל</u> הפונקציות במרחב באמצעות קומבינציה לינארית של סט מסוים של פונקציות אז אותו סט נקרא סט שלם.

הפירוש הסטטיסטי המוכלל והסבר מסכם על צורת העבודה בתורת הקוונטים

סיכום כללי

הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם של פונקציות (או בסיס).
אפשר לכתוב כל פונקציית גל כקומבינציה לינארית של הבסיס העצמי של כל אופרטור.

כלומר, אם ϕ_n ו- λ_n הן הפונקציות העצמיות והערכים העצמיים של האופרטור $\hat{A}$
אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה: $\omega(x,t)=\sum\alpha_n\phi_n$.

$|\alpha_n|^2$ זה ההסתברות להיות במצב ϕ_n או ההסתברות למדוד את הערך λ_n.

הערכים המדידים היחידים של גודל מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו גודל.

בשביל למצא את α_n:

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*\Psi(x,t)\,\mathrm{d}x$$

במקרה הרציף:

$$\lambda_n = \lambda(k)$$
$$\phi_n \to \phi(k)$$

$$\sum \alpha_n\phi_n \to \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\,(k,\mathrm{t})\phi(k)\,\mathrm{d}k$$

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\,(k,\mathrm{t})\phi(k)\,\mathrm{d}k$$

$$|\alpha_n|^2 \to |\alpha(k,t)|^2\,\mathrm{d}k$$

שאלות

1) פונקציה משולשת

נתון חלקיק בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב L. כזכור, המצבים העצמיים עבור בור שכזה נתונים ע"י הפונקציות: $\phi_n=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ והאנרגיות העצמיות הן: $E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2$. נתון שפונקציית הגל ההתחלתית בה הוכנה המערכת היא פונקציה משולשת מהצורה:

$$\psi(x,0)=\begin{cases}\frac{A}{L}x & for \quad 0<x<\frac{L}{2}\\ A(1-\frac{x}{L}) & for \quad \frac{L}{2}<x<L\end{cases}$$

א. מצאו\י את A.

ב. מהי ההסתברות שבמדידת אנרגיית החלקיק ימדדו הערכים: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5?

ג. חשבו\י את ערך התוחלת של אנרגיית החלקיק $\langle E\rangle$.

ייתכן ותזדקקו\י לטור הבא: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

2) פונקציית גאוסייאן ומעבר לתדר

פונקציית הגל (מנורמלת) של חלקיק חופשי ב- $t=0$ נתונה לפי:

$$\Psi(x,t=0)=(2\pi a^2)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2}}$$

א. מצאו את פונקציית הגל של החלקיק במרחב התדר: $\Psi(k,t=0)$.

ב. מצאו את אי הוודאות של מספר הגל של החלקיק Δk.

השתמשו ב:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2-bx-c}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx=0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$$

תשובות סופיות

1) א. $A=\sqrt{\frac{12}{11L}}$

ב. $P(E_1)=0.09\ ,\ P(E_3)=1.1\cdot 10^{-3}\ ,\ P(E_5)=1.4\cdot 10^{-4}\ ,\ P(E_2)=P(E_4)=0$

ג. $\langle E\rangle=\frac{6\hbar^2}{11mL^2}$

2) א. $\sqrt{2}\left(2\pi\varphi^2\right)^{\frac{1}{4}}e^{-ikx_0}e^{-a^2k^2}$ ב. $\sqrt{\frac{\pi}{2a^2}}$

יחס החילוף

סיכום כללי

יחס החילוף (או הקומוטטור) מוגדר להיות:

$$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$$

יחס החילוף הוא אופרטור בפני עצמו.
אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס החילוף שלהם שווה לאפס
ואם הסדר כן משנה אז הפעלה של יחס החילוף תיתן ערך מורכב כלשהו
לאופרטורים שיחס החילוף שלהם מתאפס אנחנו קוראים חילופיים.
יחס החילוף של המיקום עם התנע:

$$\langle[\hat{x},\hat{p}_x]\rangle=i\hbar$$

אם האופרטורים $\hat{A}$ ו-$\hat{B}$ מתחלפים אז קיים סט של פונקציות עצמיות משותפות
לשניהם ולהפך (אם הם לא מתחלפים אז לא ניתן למצא סט של פונקציות עצמיות
משותפות).
אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם בו זמנית בדיוק אינסופי.
אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות
ביניהם לפי:

$$\Delta A\Delta B\geq\frac{1}{2}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|$$

שאלות

1) פירוק יחס חילוף מורכב

א. הראו כי: $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$

ב. הראו כי: $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}$

ג. מצאו את $[\hat{x},\hat{p}^2]$ ובדקו האם אופרטור המיקום מתחלף עם ההמילטוניאן של חלקיק חופשי במימד אחד.

2) הוכחת זהות

הוכיחו כי: $[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}]=[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{B},\hat{C}]$.

תשובות סופיות

1) א-ב. הוכחה. ג. $2i\hbar\hat{P}$, לא מתחלף.

2) הוכחה.

משפט ארנפס

סיכום כללי

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Q\rangle=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{Q}]\rangle+\left\langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\right\rangle$$

אם אופרטור מתחלף עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי קבוע בזמן.

שאלות

1) הקשרים הקלאסיים

א. הראו באמצעות משפט ארנפסט כי: $\langle p\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle$.

ב. הראו כי: $[\hat{p},U(\hat{x})]=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial U}{\partial x}$.

ג. הראו באמצעות משפט ארנפסט כי: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p\rangle=-\left\langle\frac{\partial U}{\partial x}\right\rangle$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.

תרגילים נוספים

שאלות

1) התפתחות בזמן בבור אינסופי

נתון חלקיק בעל מסה m אשר כלוא בבור פוטנציאל אינסופי חד-מימדי בעל אורך L אשר מרכזו ב- $x=\frac{L}{2}$. פונקציית הגל של החלקיק ברגע $t=0$ הינה סופרפוזיציה של שני מצבים עצמיים של בור פוטנציאל אינסופי:

$\psi(x,t=0)=A\left[\phi_1(x)+\phi_2(x)\right]$.

כאשר ϕ_1 הוא מצב היסוד (בעל אנרגיה E_1) ו- ϕ_2 הוא המצב המעורר הראשון (בעל אנרגיה E_2).

שני המצבים בעלי הסתברות זהה.

א. מצאו את הנרמול של פונקציית הגל.

ב. מצאו את $\psi(x,t)$. ודאו כי $\psi(x,t)$ מקיימת את משוואת שרדינגר.

ג. מצאו את $|\psi(x,t)|^2$, בטאו את פונקציית צפיפות ההסתברות כפונקציה סינוסיאדלית בזמן.

ד. חשבו את ערך התצפית של המקום. שימו לב כי ערך התצפית עושה אוסילציות בזמן. מהי תדירות האוסילציות?

ה. חשבו את ערך התצפית של התנע לפי הגדרה. הראו כי מתקיים:

$\left(\langle p\rangle=m\frac{d}{dt}(\langle x\rangle)\right)$.

ו. חשבו את ערך התצפית של האנרגיה של החלקיק לפי הגדרה. הסבירו את תשובתכם.

ז. הניחו כי אי הודאות באנרגיה היא: $\Delta E=(E_2-E_1)$ והשתמשו בעיקרון אי הודאות של הייזנברג על מנת למצוא את Δt.
השוו לזמן המחזור של האוסילציות שמצאתם בסעיף ד' והסבירו.

תשובות סופיות

1) א. $A=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ב. $\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}+\phi_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\right)$

ג. $|\psi(x,t)|^2=\frac{1}{2}\left(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2+2\phi_1+\phi_2\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right)\right)$

ד. $\langle x\rangle : \frac{L}{2}-\frac{16}{9}\frac{L}{\pi^2}\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right)$

$\omega=\frac{E_2-E_1}{\hbar}=2\pi F$

ה. $\langle P\rangle=\frac{8\hbar}{3L}\sin\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right)$

ו. $\langle E\rangle=\frac{1}{2}E_1+\frac{1}{2}E_2$, חישוב התוחלת של האנרגיה הוא ההסתברות להיות בכל מצב עצמי של האנרגיה כפול האנרגיה של המצב.

ז. $\Delta t\simeq\frac{\hbar}{2(E_2-E_1)}$

תיאורית הקוונטים א מספר הקורס 141411

פרק 2 - פורמליזים אלגברי לתורת הקוונטים

תוכן העניינים

ייצוג באמצעות אלגברה לינארית:

סיכום כללי:

פונקציות הגל מקיימות את התנאים של מרחב וקטורי.

הכללות:

1. נעבוד עם וקטורים ביותר משלושה מימדים.
2. נעבוד עם סקלרים שיכולים להיות גם מספרים מורכבים.

כתיב דיראק:

ket:
$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

bra:
$$\langle\psi| = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, ..)$$

מכפלה פנימית - הכללה של מכפלה סקלרית ליותר מ-3 מימדים.

תכונות המכפלה הפנימית:

תכונה 1: $\langle v|u\rangle = \langle u|v\rangle^* =$ סקלר

תכונה 2: $\langle v|v\rangle \geq 0$ ממשי, אם $\langle v|v\rangle = 0$ אז $|v\rangle = |0\rangle$

תכונה 3: $< v|(\alpha|u > +\beta|k >) = \alpha\langle v|u\rangle + \beta\langle v|k\rangle$

הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*\psi_2 \, dx$$

נורמה – הכללה של גודל של וקטור ליותר מ-3 מימדים.

$$||v|| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$$

אם המכפלה הפנימית של שני וקטורים מתאפסת אז אומרים שהוקטורים **אורתוגונליים**.

מרחב L_2 (או L^2) – מכיל את כל הפונקציות שהאינטגרל על גודל הפונקציה בריבוע אינו מתבדר: $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 dx<\infty$.

בפיזיקה, מרחב פונקציות הגל שנעבוד איתו נקרא מרחב הילברט ובפועל הוא יהיה המרחב L_2.

* הפונקציות העצמיות של התנע והמיקום אינם ב- L_2 אבל עדיין עובדים איתם.

ייצוג באמצעות בסיס:

בסיס – סט של וקטורים (בלתי תלויים) שבאמצעותם ניתן לבטא כל וקטור אחר במרחב.

בסיס אורתוגונאלי – בסיס שבו כל הוקטורים אורתוגונליים.

בסיס אורתונורמאלי – בסיס אורתוגונאלי שבו הנורמה של כל וקטור היא 1.

הבסיס הסטנדרטי – בסיס שמורכב מוקטורי יחידה.

סט הפונקציות העצמיות (או הו"ע) של כל אופרטור מהוות בסיס*

* יש יוצאי דופן, לדוגמה במקרים שהבסיס אינסופי.

$$\psi(x)=\sum\alpha_n\phi_n(x)$$

או

$$|\psi\rangle=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ .\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

כאשר

$$\alpha_n=\langle\phi_n|\psi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n{}^*(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

המכפלה הפנימית בהצגה באמצעות בסיס אורתונורמאלי:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle=\left(\alpha_1^*,\alpha_2^*,\alpha_3^*,..\right)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \dots\end{pmatrix}=\sum\alpha_i^*\beta_i$$

שאלות:

1) ייצוג בבסיס לז'נדר

נתונה הפונקציה: $f(x)=|x|\ ,\ x\in[-1,1]$.

בתרגיל זה נתרגל פריסה (או ייצוג) באמצעות בסיס פולינומי לז'נדר המנורמל לקטע: $x\in[-1,1]$:

$$L_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ L_1(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}x\ ,\ L_2(x)=\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\ ,\ L_3(x)=\sqrt{\frac{7}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)\ ,\ \ldots$$

א. הראו כי ארבעת איברי הבסיס הנ"ל הם אכן אורתונורמאלים, כלומר: $\delta_{nm}=\langle L_n|L_m\rangle$.

ב. מצאו את ארבעת המקדמים ("המשקלים") הראשונים בייצוג של $f(x)$ בבסיס לז'נדר. (רמז: $\alpha_n=\langle L_n|f\rangle$).

ג. רשמו את הפונקציה לפי ארבעת האיברים הראשונים ושרטטו אותה (באמצעות מחשב) על גבי הפונקציה המקורית.

2) חישוב אי ודאות בתנע ומיקום

א. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב: $|\psi\rangle=|x_1\rangle$.
הנחייה: בשביל לחשב את ערכי התצפית של התנע השתמשו בקשר: $\langle p|x\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$ (או בטרנספורם פורייה) על מנת למצא את פונקציית הגל בבסיס התנע.

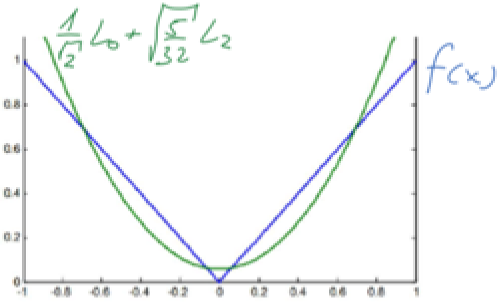
ב. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב: $|\psi\rangle=\alpha|x_1\rangle+\beta|x_2\rangle$. ($\alpha$, β ממשיים).
מהו החסם על אי הודאות בתנע?
(את אי הוודאות בתנע ניתן להשאיר כאינטגרל).

ג. מה יקרה לפונקציית הגל אם נערוך מדידה ונקבל שהחלקיק נמצא ב-x_1?

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. $\alpha_1=\alpha_3=0\ ,\ \alpha_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \alpha_2=\sqrt{\frac{5}{32}}$

ג. $f(x)\approx\frac{1}{\sqrt{2}}L_0+\sqrt{\frac{5}{32}}L_2$



2) א. $\Delta x=0\ ,\ \Delta p=\infty$

ב.

$$\Delta x=\alpha\beta|x_1-x_2|\ ,\ \langle p\rangle=0\ ,\ \langle p^2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}p\left[1+2\alpha\beta\cos\left(\frac{p(x_1-x_2)}{\hbar}\right)\right]dp=\infty$$

ג. פונקציית הגל תקרוס ונחזור למצב של סעיף א'.

אי שוויון שוורץ:

$$|\langle a|b\rangle|^2\le\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle$$

זווית מוכללת בין וקטורים:

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{\langle a|b\rangle\langle b|a\rangle}{\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle}}$$

אי שוויון המשולש:

$$|(|a\rangle+|b\rangle)|\le|a|+|b|$$

שאלות:

1) אי שוויון שוורץ

הוכיחו את אי שוויון שוורץ : $|\langle a|b\rangle|^2 \leq \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle$.

השתמשו ב-$|c\rangle = |a\rangle - \frac{\langle b|a\rangle}{\langle b|b\rangle}|b\rangle$ ובעובדה שהנורמה של וקטור תמיד גדולה או שווה לאפס $\langle c|c\rangle \geq 0$.

2) אי שוויון המשולש

הוכיחו את אי שוויון המשולש : $|(|a\rangle + |b\rangle)| \leq |a| + |b|$.

רמז : השתמשו גם באי שוויון שוורץ.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.

תיאורית הקוונטים א מספר הקורס 141411

פרק 3 - אופרטורים בייצוג האלגברי

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

סיכום כללי:

-אופרטורים מיוצגים באמצעות מטריצות :

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix}$$

האיבר Q_{ij} מעביר את הוקטור e_j לוקטור e_i : $Q_{ij} = \langle e_i | \hat{Q} | e_j \rangle$ (כפול סקלר כלשהו).
i שורה, j עמודה.

אם הבסיס הוא בסיס עצמי של אופרטור כלשהו אז המטריצה של האופרטור תהיה אלכסונית והערכים על האלכסון הם הערכים העצמיים של האופרטור.

$$\langle \psi_1 | \hat{Q} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{Q} \psi_2 \rangle$$

כתיב נוסף :

$$\langle \hat{Q}\psi | = \left(\hat{Q}|\psi\rangle\right)^\dagger = \langle \psi | \hat{Q}^\dagger$$

חזרה על אלגברה לינארית

- מציאת ערכים עצמיים (ע״ע) : $\det(Q - \lambda I) = 0$
- מציאת וקטורים עצמיים (ו״ע) בסרטון :

מטריצה משוחלפת :

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

צמד הרמיטי:

$$A^{\dagger}=(A^{*})^{T}=\begin{pmatrix} A_{11}^{*} & A_{21}^{*} & \dots & A_{n1}^{*} \\ A_{12}^{*} & A_{22}^{*} & \dots & A_{n2}^{*} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n}^{*} & A_{2n}^{*} & \dots & A_{nn}^{*} \end{pmatrix}$$

מטריצת יחידה:

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=\sum|\phi_n\rangle\langle\phi_n|$$

כפל מטריצות: $C=A\cdot B\Rightarrow C_{mn}=\sum A_{mi}B_{in}$

כפל מטריצות הוא לא חילופי: $AB\neq BA$

יחס חילוף בין מטריצות: $[A,B]=AB-BA$

מטריצה ההופכית: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

מטריצה אוניטרית: $U^{\dagger}=U^{-1}$

- זהויות:

$$\left(\langle\psi_1|\hat{A}^{\dagger}|\psi_2\rangle\right)^{*}=\langle\psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle$$
$$\langle\psi_1|\hat{A}\psi_2\rangle=\langle\hat{A}^{\dagger}\psi_1|\psi_2\rangle$$
$$(A^{\dagger})^{\dagger}=A$$
$$(AB)^{T}=B^{T}A^{T}$$
$$(AB)^{\dagger}=B^{\dagger}A^{\dagger}$$
$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

הגודל של ערך עצמי של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1.
אופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים נורמליים, כלומר: $[A,A^{\dagger}]=0$.

שאלות:

1) בניית אופרטורים ופעולות על פונקציות שונות

נתון כי: $\{|v_1>, |v_2>\}$ מהווים בסיס אורתונורמאלי במרחב וקטורי דו מימדי.
מגדירים את המצבים הבאים:

$$|\psi_1>= \alpha_1|v_1> +\alpha_2|v_2>$$
$$|\psi_2>= \beta_1|v_1> +\beta_2|v_2>$$

כאשר: $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ הם סקלרים מורכבים.

א. רשמו את $<\psi_2|$ בכתיב דיראק בבסיס הנ"ל.

ב. חשבו את המכפלה הפנימית $\langle\psi_2|\psi_1\rangle$.
האם היא שווה למכפלה הפנימית $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$?

ג. רשמו את $|\psi_2>$ ואת $<\psi_2|$ כוקטורים בכתיב מטריצי.

ד. מצאו את הנורמה של המצב $|\psi_2>$.

ה. נגדיר אופרטור $\hat{Q} = c|v_1><v_2|$ כאשר c הוא סקלר מורכב שונה מאפס.
חשבו את פעולת האופרטור על איברי הבסיס וכתבו את הייצוג המטריצי של האופרטור בבסיס הנתון. האם האופרטור הרמיטי?

ו. חשבו את הפעולה של $\hat{Q}$ על המצב $|\psi_2>$ פעם אחת דרך הייצוג המטריצי ופעם שניה דרך כתיב דיראק.

ז. נגדיר אופרטור חדש $\hat{G} = c|\psi_1><\psi_2|$ מצאו את $\hat{G}$ בייצוג המטריצי.

ח. נתון כי האופרטור $\hat{S}$ מבצע את הפעולה הבאה:

$$\hat{S}|v_1>= |v_2>$$
$$\hat{S}|v_2>= |v_1>$$

מצאו את הייצוג המטריצי של $\hat{S}$ וחשבו את הפעולה שלו על המצבים $|\psi_1>,|\psi_2>$.

2) מציאת ע"ע ווע"ע

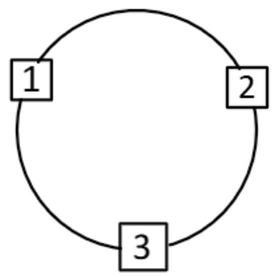
נתונה המטריצה הבאה: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

א. האם המטריצה הרמיטית?

ב. מצאו את הע"ע ווי"ע של A.

3) 3 אתרים על טבעת

נתונה מערכת ובה שלושה אתרים על טבעת:



נסמן את המצבים בהם נמצא החלקיק בכל אחד מהאתרים בצורה הבאה:

$$|1\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ |2\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ |3\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

הדינמיקה של המערכת מתוארת ע"י ההמילטוניאן: $H=\varepsilon\hat{D}+\varepsilon\hat{D}^{\dagger}$
כך שאופרטורי ההזזות מוגדרים:

$$\hat{D}|i\rangle=|i-1\rangle,\ \hat{D}|1\rangle=|3\rangle,\ \hat{D}^{\dagger}|i\rangle=|i+1\rangle,\ \hat{D}^{\dagger}|3\rangle=|1\rangle.$$

אופרטור המיקום מוגדר כ- $\hat{x}|i\rangle=i|i\rangle$.

א. ייצגו את אופרטורי ההזזה ע"י מטריצה והראו כי אחד הוא צמוד הרמיטי של השני.

ב. ייצגו את אופרטור המיקום ע"י מטריצה. מהם הוקטורים והערכים העצמיים.

ג. מהם הוקטורים והערכים העצמיים של ההמילטוניאן?
שימו לב כי הו"ע אינם אורתוגונליים ויש לבצע תהליך גרהם שמידט.
פתרון המשוואה: $0=-\lambda^3+3\varepsilon^2\lambda+2\varepsilon^3$ הוא: $\lambda_{1,2}=-\varepsilon\,,\lambda_3=2\varepsilon$.

ד. מכינים את החלקיק בזמן 0 במצב $|2\rangle$, מהו מצב המערכת בזמן כלשהו?

ה. מה הסיכוי למצוא את החלקיק באתר 3 אחרי זמן כלשהו?

ו. מהו יחס החילוף $[D,x]$?

ז. **מצאו את המצבים העצמים עבור מערכת עם אינסוף אתרים (גבול הרצף) עבור $\hat{D}^{\dagger}$, $\hat{D}$ ועבור H.
הדרכה: כתבו את משוואת המצבים העצמיים בכתיב דיראק ונסו לחלץ סדרה הנדסית עבור המקדמים. מתוך התנאי על האיבר האחרון מצאו את הערכים העצמיים והפונקציות העצמיות.

4) הוכחת זהויות 1

א. הוכיחו כי: $\langle i|\hat{A}|j\rangle = \left(\langle j|\hat{A}^{\dagger}|i\rangle\right)^{*}$ כאשר: $|i>, |j>$ הן פונקציות בבסיס אורתונורמאלי.

ב. הוכיחו כי: $\langle\psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle = \left(\langle\psi_1|\hat{A}^{\dagger}|\psi_2\rangle\right)^{*}$ כאשר ψ_1, ψ_2 הן פונקציות כלשהן.

ג. הוכיחו כי: $\langle\hat{A}^{\dagger}\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\hat{A}\psi_2\rangle$.

5) הוכחת זהויות 2

הוכיחו את הטענות הבאות עבור אופרטורים כלשהם A ו-B:

א. $(A^{\dagger})^{\dagger} = A$.

רמז: השתמשו בתכונות ההצמדה של מכפלה פנימית והראו כי: $\langle\psi_1|A|\psi_2\rangle = \left\langle\psi_1\left|(A^{\dagger})^{\dagger}\right|\psi_2\right\rangle$.

ב. $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$.

ג. $A + A^{\dagger}$, $i(A - A^{\dagger})$, $AA^{\dagger}$ הם כולם אופרטורים הרמיטים.

6) הוכחת זהויות 3

נניח כי לאופרטור Q ישנם וקטורים עצמיים $|\phi_i>$ עם ערכים עצמיים λ_i בהתאמה. הראו כי אם אין ניוון אז: $\left(\Pi_i(\hat{Q} - \lambda_i)\right)|\psi>= 0$

כאשר: $\Pi_i(x_i) = x_1x_2x_3 \cdots x_n$.

רמז: השתמשו בתכונת מטריצת היחידה: $I = \sum_i|\phi_i >< \phi_i|$.

7) הוכחת זהויות 4

הראו כי הגודל של ערך עצמי של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1.

הנחייה: הניחו מצב עצמי של אופרטור אוניטרי שעבורו מתקיים: $U|\phi >= \lambda|\phi >$.

8) הוכחת זהויות 5

הוכיחו שאופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים נורמליים, כלומר שהם מקיים את התנאי: $[A, A^{\dagger}] = 0$.

9) הוכחת זהויות 6

הראו כי אופרטור אוניטרי הפועל על פונקציית גל אינו משנה את הנורמה של הפונקציה.

10) אופרטור סיבוב

נתון האופרטור הבא:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

א. הראו שהאופרטור אוניטרי.

ב. מצאו את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים.

ג. הראו שהוקטורים העצמיים אורתונורמאלים.

ד. הראו שהמטריצה $U^\dagger AU$ היא מטריצה אלכסונית כאשר U מורכבת מהוקטורים העצמיים של A בעמודות.

11) חישוב אי ודאות בתנע ומיקום

א. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב: $|\psi\rangle = |x_1\rangle$.
הנחייה: בשביל לחשב את ערכי התצפית של התנע השתמשו בקשר: $\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$ (או בטרנספורם פורייה) על מנת למצא את פונקציית הגל בבסיס התנע.

ב. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב: $|\psi\rangle = \alpha|x_1\rangle + \beta|x_2\rangle$.
(α , β ממשיים).
מהו החסם על אי הודאות בתנע?
(את אי הוודאות בתנע ניתן להשאיר כאינטגרל).

ג. מה יקרה לפונקציית הגל אם נערוך מדידה ונקבל שהחלקיק נמצא ב-x_1?

תשובות סופיות:

1) א. $\beta_1^* < v_1 | + \beta_2^* < v_2 |$

ב. $| \beta_1^*\alpha_1+\beta_2^*\alpha_2$, לא שווה.

ג. $L\psi_2 | = \left(\beta_1^*, \beta_2^*\right),\ |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$

ד. $\sqrt{|\beta_1|^2+|\beta_2|^2}$

ה. $\begin{pmatrix}0 & c\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ לא הרמיטי.

ו. $\begin{pmatrix}c\beta_2\\ 0\end{pmatrix}$ או $c\beta_2|v_1\rangle$

ז. $c\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1^* & \alpha_1\beta_2^*\\ \alpha_2\beta_1^* & \alpha_2\beta_2^*\end{pmatrix}$

ח. $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$\hat{S}|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix}$

$\hat{S}|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix}\beta_2\\ \beta_1\end{pmatrix}$

2) א. כן.

ב. $\lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=-1\ ,\ \lambda_3=1$: $|\lambda_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\ |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\ ,\ |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

3) א. $D = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\ ,\ D^+ = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

ב. $X = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $|1\rangle\ ,\ |2\rangle\ ,\ |3\rangle$; $\lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=2\ ,\ \lambda_3=3$

ג. $\lambda_1=-\varepsilon\ ,\ |\lambda_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)$

$\lambda_2=-\varepsilon\ ,\ |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$

$\lambda_3=-2\varepsilon\ ,\ |\lambda_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

ד. $|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{+i\frac{\varepsilon}{\hbar}t}|\lambda_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\varepsilon}{\hbar}t}|\lambda_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{2\varepsilon}{\hbar}t}|\lambda_3\rangle$

ה. $\left(-\frac{5}{6}\cos(\omega t)+\frac{1}{3}\cos(2\omega t)\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\sin(\omega t)+\frac{1}{3}\sin(2\omega t)\right)^2$

ו. $\left[\hat{D},\hat{X}\right]=\hat{D}$

ז. הפונקציות העצמיות של שלושת האופרטורים הן:

$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{N}}e^{-ikx}$ או $|\phi_i\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\varepsilon e^{-i\frac{2\pi j}{N}n}|n\rangle$ כאשר j מספר שלם בין $-\infty$ ל- ∞ ו- $k=\frac{2\pi}{N}j$.

הע"ע של D^+ הן $\lambda_j^+=e^{i\frac{2\pi j}{N}}$, של D הן $\lambda_j=e^{-i\frac{2\pi j}{N}}$ ושל H הן $E_j=2\varepsilon\omega\cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right)$.

4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.

10) א. הוכחה. ב. $\lambda_1=e^{i\theta}$ $|\lambda_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i)$, $\lambda_2=e^{-i\theta}$ $|\lambda_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i)$ ג. הוכחה.

ד. הוכחה.

11) א. $\Delta x=0\ ,\ \Delta p=\infty$

ב.

$$\Delta x=\alpha\beta|x_1-x_2|\ ,\ \langle p\rangle=0\ ,\ \langle p^2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}p\left[1+2\alpha\beta\cos\left(\frac{p(x_1-x_2)}{\hbar}\right)\right]dp=\infty$$

ג. פונקציית הגל תקרוס ונחזור למצב של סעיף א'.

פרופוגטור ההתפתחות בזמן:

סיכום כללי:

$$U(t)|\psi(t=0)\rangle = |\psi(t)\rangle$$

$$U(t) = \sum e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |E_n >< E_n|$$

שאלות:

1) **הוכחה שהפרופוגטור אוניטרי**
הראו כי הפרופוגטור הוא אופרטור אוניטרי וכי הנורמה של פונקציית הגל לא משתנה בזמן.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

תיאורית הקוונטים א מספר הקורס 141411

פרק 4 - אופרטור העלאה והורדה (סולם) באוסילטור הרמוני

תוכן העניינים

אופרטור העלאה והורדה באוסילטור הרמוני:

סיכום כללי:

אופרטור ההורדה (או השמדה):

$$\hat{a}=\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{x}+\frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

אופרטור ההעלאה (או יצירה):

$$\hat{a}\dagger=\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{x}-\frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

$$\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}\dagger-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left[\hat{a},\hat{a}\dagger\right]=1$$

$$\hat{a}\left|\psi_n\right\rangle=\sqrt{n}\left|\psi_{n-1}\right\rangle$$

$$\hat{a}\dagger\left|\psi_n\right\rangle=\sqrt{n+1}\left|\psi_{n+1}\right\rangle$$

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\qquad n=0,1,2,\dots$$

$$\psi_0(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_n=\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}\dagger\right)^n\psi_0$$

$$\psi_n(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}H_n\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}x\right]$$

$$H_0(y)=1$$

$$H_1(y)=2y$$

$$H_2(y)=-2\left(1-2y^2\right)$$

$$H_3(y)=-12\left(y-\frac{2}{3}y^3\right)$$

GOOL בשביל התירגול

שאלות:

1) יחס החילוף של a עם H

מצאו את:

א. $\left[\hat{a},\hat{H}\right]$

ב. $\left[\hat{a}\dagger,\hat{H}\right]$

2) חישוב עם האופרטורים

נתון אוסילטור הרמוני עם תדירות ω.

א. הראו באופן מפורש את פעולת האופרטור $\hat{a}$ על המצבים ϕ_0 ו-ϕ_1
(כאשר ϕ_n הם המצבים העצמיים של ההמילטוניאן).

מכינים חלקיק במצב: $|\psi\rangle = A\left[|\phi_1\rangle + \sqrt{2}|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle\right]$

ב. מצאו את הקבוע A.

ג. מהי התוחלת והשונות של האנרגיה ב-$t=0$?

ד. מהי פונקציית הגל כתלות בזמן?

ה. מהו ערך התוחלת של המיקום כתלות בזמן?

תשובות סופיות:

1) א. $\hbar\omega\hat{a}$ ב. $-\hbar\omega\hat{a}^\dagger$

2) א. הוכחה. ב. $\frac{1}{2}$ ג. $\Delta E = \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\omega$ $\langle E\rangle = \frac{5}{2}\hbar\omega$

ד. $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left[e^{-i\frac{3}{2}\omega t}|\phi_1\rangle + \sqrt{2}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}|\phi_2\rangle + e^{-i\frac{7}{2}\omega t}|\phi_3\rangle\right]$

ה. $\langle x(t)\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\left[2+\sqrt{6}\right]\cos\left(\frac{1}{2}\omega t\right)$

תיאורית הקוונטים א מספר הקורס 141411

פרק 5 - תרגילים ברמת מבחן

תוכן העניינים

שאלות חזרה קצרות בנושאים ספציפיים

שאלות

1) פיזור

חלקיק בעל אנרגיה E פוגע במדרגת פוטנציאל בגובה $V_0 > E$ ורוחב אינסופי.
האם מקדם ההחזרה גדול, קטן או שווה ל-1?

2) אופרטורים 1

קבעו האם הטענה הבאה נכונה או לא נכונה:
הערך העצמי של אופרטור הרמיטי חייב להיות מספר ממשי.

3) אופרטורים 2

נתונים ψ_1 ו-ψ_2 שהם שני מצבים עצמיים של אופרטור הרמיטי.
האם גם $\psi_1 + \psi_2$ הוא מצב עצמי של אותו אופרטור?

4) אופרטורים 3

המצב הקוונטי של חלקיק נתון על ידי $\psi = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \alpha_3\phi_3$, כאשר ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 מייצגים מצבים עצמיים של אופרטור התנע. מבצעים מדידה של התנע של החלקיק.
האם מיד לאחר המדידה החלקיק יכול להיות במצב $\psi = \beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2$, כאשר β_1, β_2 הם קבועים השונים מאפס?

5) אופרטורים 4*

האם האופרטור $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x}$ יכול לייצג גודל פיזיקאלי מדיד?

תשובות סופיות

1) שווה לאחד.
2) נכונה
3) לא, אלא אם ψ_1 ו-ψ_2 הם מצבים מנוונים.
4) לא
5) לא